

實驗資料處理

- 一、 有效數字(Significant Figures)
- 二、 作圖(Graphing)
- 三、 線性迴歸(Linear Regression)
- 四、 準確度(Accuracy)與精確度(Precision)
- 五、 誤差(Error)與差異(Difference)
- 六、 系統性誤差(Systematic Error)與隨機誤差(Random Error)
- 七、 量測不確定度(Measurement Uncertainty)

一、 有效數字(Significant Figures)

有效數字是一個量測所能夠呈報“確知”的小數位數。恰當地使用有效位數可以正確呈現量測之不準確度，例如科學家知道 1.2345 m 比 1.2 m 的量測呈報更準確。

決定有效數字之一般準則:

1. 以下均有三位有效位數

- 0.00123
- 0.123
- 1.23
- 12.3
- 12300 (後面兩個 0 不是有效的，只是為了表達 100 之數值，如果要表達它們也是有效位數，就必須使用科學記號方式呈現為 1.2300×10^4 .)

2. 以下均為一位有效位數:

- 0.005
- 0.5
- 5
- 500
- 5,000,000

3. 以下均為四位有效位數:

- 0.004001
- 0.004000
- 40.01
- 40.00
- 4321
- 432.1
- 43,210,000

4. 整數: 可假設為具有無限多位有效位數。

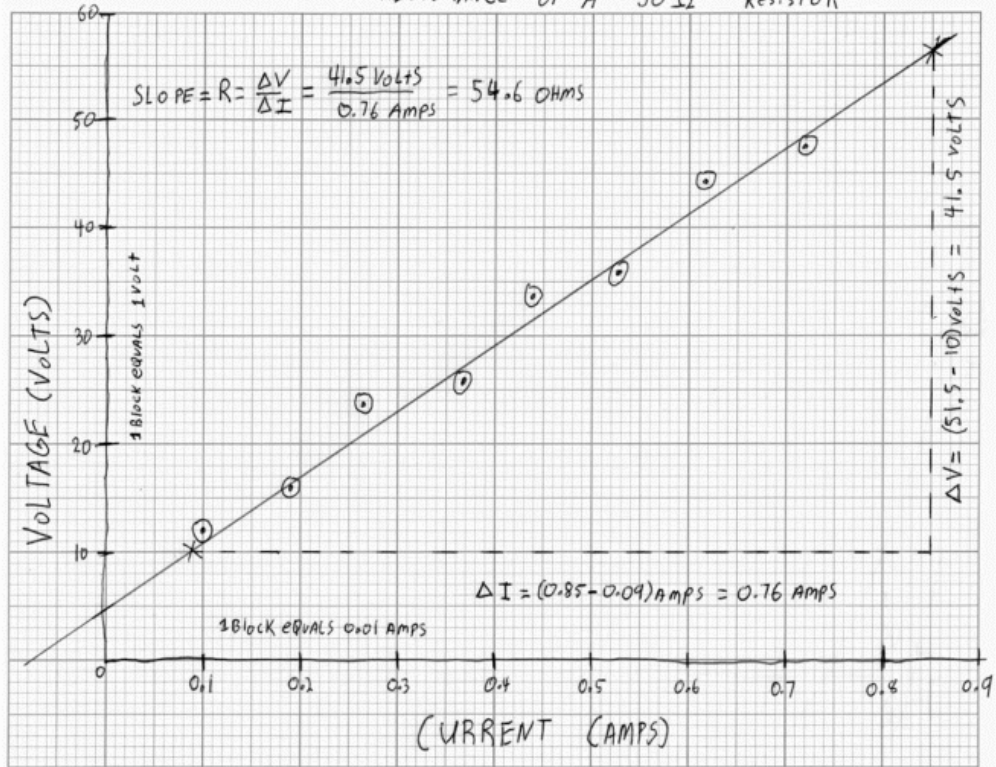
5. 乘與除的運算: 結果之有效位數為運算量中有效位數最小者，例如 $4.7 \times 5.93 = 28$ (只有兩位有效位數，結果不等於計算機算出來的 27.871)。

6. 加與減的運算: 將所有運算數字之有效位數設為數值最小者(例子中的 0.00159)之有效位數，例如 $3.14 + 0.00159 = 3.14159$ 。

二、 作圖(Graphing)

1. 所有實驗結果作圖應該使用鉛筆在圖紙上完成。
2. 除非特別指示，每頁只呈現一張圖。
3. 小心選擇圖之刻度，使每張圖儘量利用到圖紙的最大部分。在兩個軸的方向，其範圍都應該涵蓋到第一個點與最後一個點。
4. 每張圖之上方都要有一個具描述性的標題，說明量測的是甚麼。
5. 每個坐標軸都要清楚標示標題與單位。
6. 每個軸的刻度都要小心標示。
7. 不要直接連結圖上的數據點，應該給出一條最佳擬合的直線或曲線。
8. 最佳擬合的直線要用直尺繪製，且要能緊密地接近所有數據點，而非只是某個單點或某群數據點。
9. 最佳擬合的直線要延伸超過數據點。
10. 最佳擬合直線之斜率要由直線上的兩個距離夠遠的點計算求得。不應該使用實驗數據點求得斜率。
11. 在一張線性圖上，計算斜率之 Δy 與 Δx 都要繪出成為一個三角形，並標示數值與單位。
12. 斜率之計算($\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$)要清楚表達於圖上，單位也要標示。
13. 上述要求請參考下圖之範例:

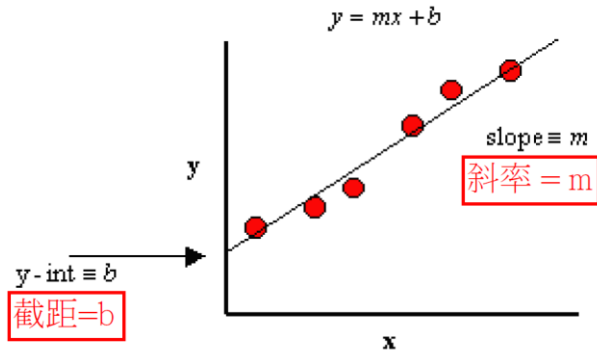
EXPERIMENTAL RESISTANCE OF A "50 Ω" RESISTOR



三、 線性迴歸(Linear Regression)

如果兩組數據(x 與 y)之間的關係為線性(linear)，當繪製 y 對 x (y versus x) 之圖時，結果將唯一直線。此關係就是線性關聯(linear correlation)且可以使用一個直線方程式 $y=mx+b$ 描述。以下為一組數據樣本與其最佳擬合(best-fit)直線。

x	y
1.0	2.6
2.3	2.8
3.1	3.1
4.8	4.7
5.6	5.1
6.3	5.3



我們可以利用統計之線性迴歸處理決定此線性方程式之斜率與截距。針對給定之 n 組 (x_i, y_i) 數據點，其線性關係之斜率(m)與截距(b)分別可由下列式子求得：

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^{i=n} (xy) - \sum_{i=1}^{i=n} (x) \sum_{i=1}^{i=n} (y)}{n \sum_{i=1}^{i=n} (x^2) - (\sum_{i=1}^{i=n} (x))^2} \quad (1)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y) - m \sum_{i=1}^{i=n} (x)}{n} \quad (2)$$

迴歸結果之好壞可以使用關聯係數(correlation coefficient) r ，以及決定係數(coefficient of determination)或 R 平方值(R-squared, R^2)表示。 $r=1$ 代表 x 與 y 確實為線性關係， r 之數值愈接近 1，代表 x 與 y 之關係愈接近線性。R-squared 代表應變數(y)之變異量可被模式(此處為線性模式)解釋的比例，其數值愈接近 1，代表該模式遇有解釋該組數據之能力。 r 之定義為：

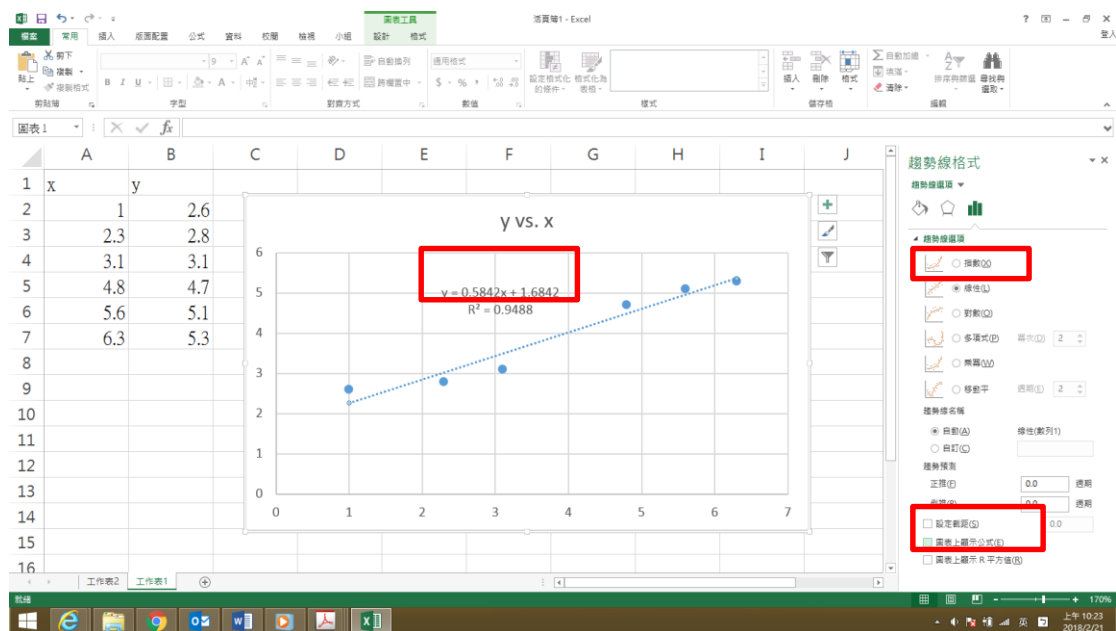
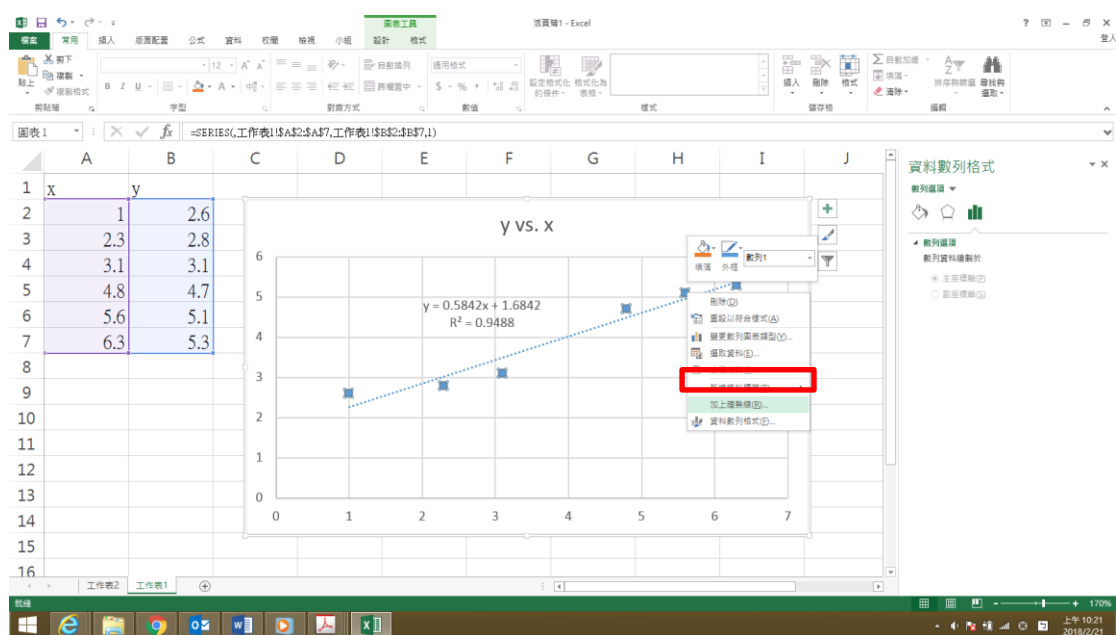
$$r = \frac{n \sum_{i=1}^{i=n} (xy) - \sum_{i=1}^{i=n} (x) \sum_{i=1}^{i=n} (y)}{\sqrt{[n \sum_{i=1}^{i=n} (x^2) - (\sum_{i=1}^{i=n} (x))^2][n \sum_{i=1}^{i=n} (y^2) - (\sum_{i=1}^{i=n} (y))^2]}} \quad (3)$$

線性迴歸分析可以也使用 Excel 內建函數功能完成，包括斜率(SLOPE)、截距(INTERCEPT)、關聯係數(CORREL)與 R 平方值(RSQ)，寫法為：

- Slope, m: **=SLOPE(known_y's, known_x's)**
- y-intercept, b: **=INTERCEPT(known_y's, known_x's)**
- Correlation Coefficient, r: **=CORREL(known_y's, known_x's)**
- R-squared, r^2 : **=RSQ(known_y's, known_x's)**

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x	y		Slope, m, =	0.5842
3		1.0	2.6			=SLOPE(C3:C8,B3:B8)
4		2.3	2.8			
5		3.1	3.1		y-intercept, b, =	1.6842
6		4.8	4.7			=INTERCEPT(C3:C8,B3:B8)
7		5.6	5.1			
8		6.3	5.3		Correlation, r, =	0.9741
9						=CORREL(C3:C8,B3:B8)

線性迴歸分析也可以使用 Excel 繪圖功能完成。首先將數據輸入 Excel 工作表之儲存格內，選擇**散佈圖**類型建立 y vs. x 圖。之後，選去圖上數據點(整個數列)，點選滑鼠右鍵清單之**“加上趨勢線”**，接著，在右方工作窗格中選取**“線性”**、**“圖表上顯示公式”**，以及**“圖表上顯示 R 平方值”**之選項，圖上即會出現**線性方程式與 R 平方值**，R 平方值愈接近 1，代表該組數據愈接近線性關係。



四、 準確度(Accuracy)與精確度(Precision)

實驗精確度(Precision)是實驗可靠度的量測或者實驗再現性的量測。圖一顯示高精確度之結果，因為結果相當集中，但準確度不佳，因為未中紅心，可能是瞄準圈校準不佳或是某個一貫的操作錯誤所致。高精確度卻低準確度之結果可能肇因於未經校正之量測裝置或者操作錯誤。因此，**精確度告訴我們一些關於儀器操作之品質**。

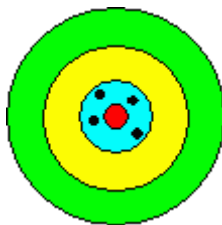
實驗準確度是實驗值有多接近真實或可接受值的量測。圖二中個實驗值均落在接近紅心之藍圈內，但結果並不一致，顯示儀器具有好的準確度，但精確度不佳，可能是槍管製造不好所導致，則不管如何小心操作，也無法同時獲得好的準確度與精確度。如果操作者不滿意結果，他必須更換設備。因此，**準確度告訴我們關於結果的品質或正確性**。

我們追求的是既精確又準確的結果，如圖三所示，所有結果均一致且落在紅心區。相較於圖一，不佳的瞄準圈校準已經調整好。

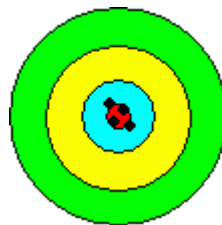
多次量測同一性質的好處是可以偵測到失誤。圖四顯示結果既準確又精確，除了一個明顯的失誤例外。因為有許多量測值，我們可以不計可能因為操作者的失誤所致的明顯錯誤數據。



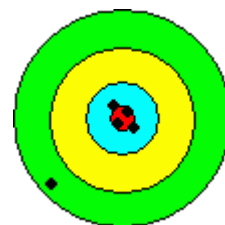
圖一.



圖二.



圖三.



圖四.

五、 誤差(Error)與差異(Difference)

絕對誤差(absolute error)是實驗量測值(measured value)與實際值(actual value)，即真實值(true value)或理論值(theoretical value)，之間的差異。

絕對誤差之定義為：

$$\text{absolute error} = |\text{measured value} - \text{actual value}|$$

百分誤差(% Error)是**相對誤差(relative error)**，由絕對誤差除以實際值求得：

$$\text{relative error (\%)} = \frac{|\text{measured value} - \text{actual value}|}{\text{actual value}} \times 100\%$$

相對誤差通常被用以表示量測之**準確度(accuracy)**。

百分差異(% Difference)可用以表示：

(1)相同量的兩次量測結果之間的差異，以其差值之絕對值除以兩量測值之平均值所得：

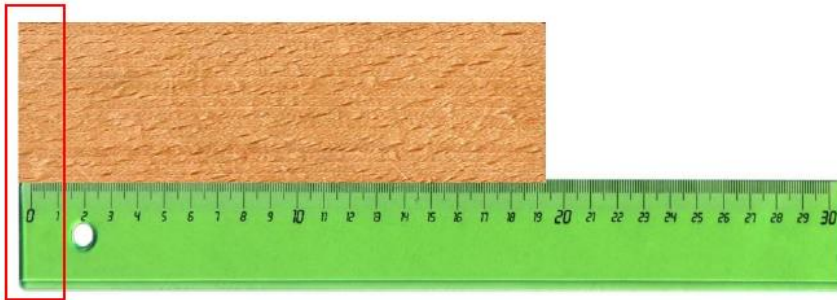
$$\% \text{ Difference} = \frac{|\text{measured value}_1 - \text{measured value}_2|}{\left(\frac{\text{measured value}_1 + \text{measured value}_2}{2}\right)} \times 100\%$$

(2)一個量測值與一個可接受值(accepted value)之間的差異，以其差值之絕對值除以可接受值求得

$$\% \text{ Difference} = \frac{|\text{measured value} - \text{accepted value}|}{\text{accepted value}} \times 100\%$$

六、 系統性誤差(Systematic Error)與隨機誤差(Random Error)

系統性誤差(Systematic Error)是一致地導致量測值太大或太小的誤差。系統性誤差可能來自於有缺陷的量測設備，例如未正確校正的秤、不正確的直尺或碼錶。系統性誤差可能來自錯誤操作量測設備，例如以直尺量測木板長度時，左邊是與直尺之左邊界對齊，而非0線，因而導致測量長度比實際長度小的結果。如果未能發現此錯誤，所有量測值均會較實際值為低。**系統性誤差**可以藉由量測設備之校正而避免，或者使用不同的量測設備或方法進行量測而發現。

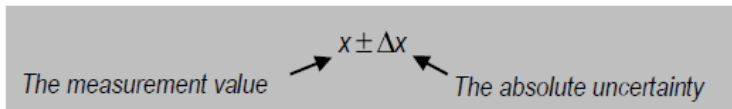


隨機誤差(Random Error)是不具可預測型態的量測變化，如果重複多次量測，每次量測值會改變，時高時低。隨機誤差是因量測時，量測者之反應不同，例如按馬錶之瞬間、對兩刻度間之位置的估計。隨機誤差之高低可由重複多次量測所呈現之結果變化程度判斷。**隨機誤差不可能完全免除**。

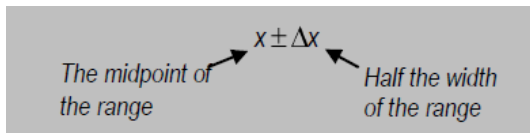
七、 量測不確定度(Measurement Uncertainty)

任何量測均無法確定結果是絕對正確，因此量測值與實際值之間均存在差異。無論量測設備多麼奇異與操作者多麼小心，任何量測均附帶著不確定性。此外，當我們使用量測值進行計算時，計算結果也不會完全正確，也附帶著有不確定性。因此，不確定性是無可避免的。

量測結果應包括其不確定度，表示為 $x \pm \Delta x$ ，即量測值 \pm 絕對不確定度：



其中 x 為不確定範圍(最高可能值至最低可能值)之中值， Δx 則為不確定範圍(最高可能值-最低可能值)之一半。

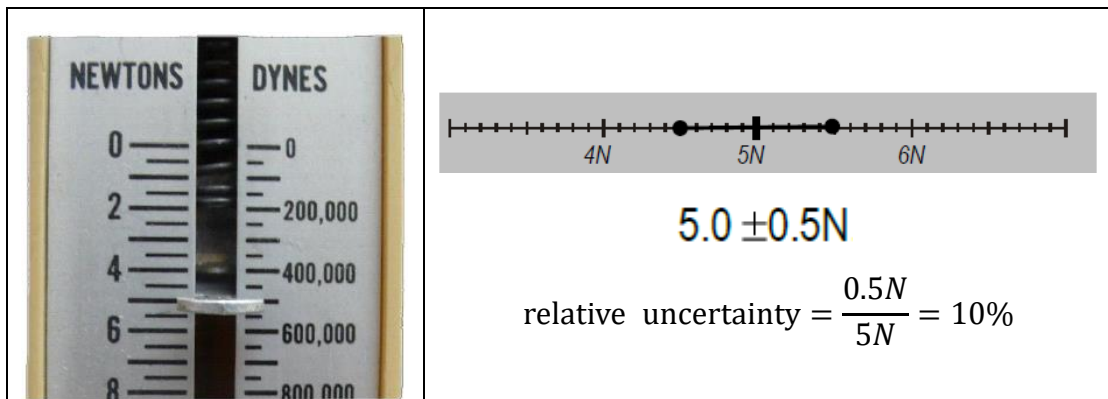


$$x = \text{mid-point} = \frac{\text{highest possible value} + \text{lowest possible value}}{2}$$

$$\text{relative uncertainty (percent)} = \frac{\Delta x}{x} \times 100$$

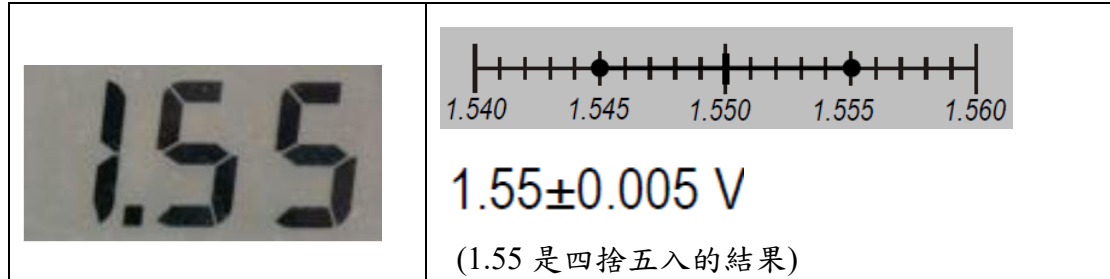
量測設備可分為類比式(Analog type)與數位式(Digital type)，前者例如直尺、捲尺、彈簧秤、三樑天平、液體溫度計等，後者具有電子顯示功能，如數位計時器、數位電壓計、數位天平與數位溫度計等。

類比式量測設備之不確定範圍是最小刻度的一半，例如：



數位量測設備需考慮其**解析度(resolution)**與製造商之設備**誤差規格(Specification)**。

受限於解析度，面板顯示之數值是經過進位所得之結果，因此因為進位造成的不確定範圍可能表示為最小可顯示位數之半，例如：



設備製造商提供之誤差規格可能高於解析度之不確定度，例如上例中，設備之誤差規格為 5%，則其不確定度範圍應為：

$$\Delta x = x \times 5\% = 1.55 \text{ V} \times 5\% = 0.0775 \text{ V}$$

結果應表示為：

$$1.55 \pm 0.0775 \text{ V}$$

計算之不確定度之傳播(Uncertainty propagation)

使用量測值進行計算時，計算結果也附帶有其不確定度，計算結果之不確定度受使用數值不確定度之影響稱為不確定度之傳播。

(1) 加法與減法運算

$$(x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y) = x + y \pm (\Delta x + \Delta y)$$

$$(x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y) = x - y \pm (\Delta x + \Delta y)$$

(2) 乘法與除法運算

$$(x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y) = xy \pm xy \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right)$$

$$(x \pm \Delta x) \div (y \pm \Delta y) = x \div y \pm x \div y \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right)$$

(3) 冪次運算

$$(x \pm \Delta x)^n = (x \pm \Delta x)^n \pm nx \left(\frac{\Delta x}{x} \right)$$

在 Excel 內表示數據之不確定度

使用 Excel 繪圖時可由“新增圖表項目”下拉選出“誤差線(Error Bar)”，即可於右側工作窗格內做誤差設定，例如：

